

105 學年度技術校院四年制與專科學校二年制統一入學測驗 數學 (B) 試題

試題分析：

105 年數學 B 卷，試題中三角、指數、對數及微積分份量較其他單元為重外，其他各單元都均勻分配，微積分的題目比去年加深一些，所以整體性而言，今年比去年 104 題目較難一些，所以今年數學成績比去年（104 年）低 8 分左右。

《各章節配分情形》

	95 年	96 年	97 年	98 年	99 年	100 年	101 年	102 年	103 年	104 年	105 年
三角函數	3	2	4	5	5	4	5	4	4	3	3
多項式與函數	2	3	1	1	2	1	2	2	2	3	2
不等式	3	1	2			1	1	1	3	2	1
平面上直線	3	7	4	5	4	5	3	3	1	1	2
平面上的圓	1	2	2	1	1	1	2		1	1	
數列與級數	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1
指數與對數	3	3	3	2	3	1	2	2	2	1	3
方程式論		1	1	1		3	1	1	2	2	1
排列組合	6	2	4	2	3	2	2	2	1	2	2
機率	3	2	2	2	1	2	1	1	2	1	1
行列式				1	1		1	1	1	1	1
向量				1	2		2	1	2	2	2
統計				2	1	3	1	1		2	2
微積分								2	2	2	3
圓錐曲線								2	1	1	1

- D** 1. 若 $\log 2 = a$ 、 $\log 7 = b$ ，則 $\log 35$ 等於下列何者？ (A) $1 + a + b$ (B) $1 + a - b$ (C) $1 - a - b$ (D) $1 - a + b$

【詳解】

$$\log 5 + \log 7 = (1 - \log 2) + \log 7 = 1 - a + b$$

- C** 2. 若某細菌每 30 分鐘分裂一次，即由 1 個變成 2 個，則 1 個細菌經過 6 小時後，分裂成多少個？ (A) 1024 (B) 2048 (C) 4096 (D) 8192

【詳解】

6 小時為 12 個 30 分鐘

$$\therefore \text{有 } 2^{12} = 4096 \text{ 個}$$

- D** 3. 已知某一族群有 10 名成員，該 10 名成員之平均月薪是 57000 元。若其中七人之平均月薪是 27000 元，則其他三人之平均月薪為多少元？ (A) 30000 (B) 42000 (C) 84000 (D) 127000

【詳解】

設其他 3 人平均月薪 x 元

	$\frac{27000 \times 7 + 3x}{7 + 3} = 57000$ $\therefore 189000 + 3x = 570000$ $\therefore x = 127000$
D	<p>4.有一樂團計畫至甲、乙兩國巡迴表演。甲國有三個城市要去表演，乙國有四個城市要去表演。若先完成甲國的演出之後，再到乙國完成演出，則巡迴路線的規劃有多少種可能？ (A)7 (B)12 (C)36 (D)144</p> <p>【詳解】</p> $3! \times 4! = 6 \times 24 = 144$
C	<p>5.已知$\triangle ABC$的三頂點為$A(-1, 2)$、$B(-3, -3)$、$C(3, -1)$，則\overline{AB}邊上的中線長為何？ (A)$\frac{\sqrt{26}}{2}$ (B)$\frac{\sqrt{71}}{2}$ (C)$\frac{\sqrt{101}}{2}$ (D)$\sqrt{26}$</p> <p>【詳解】</p> <p>M 為\overline{AB}之中點</p> $\therefore M\left(\frac{-1-3}{2}, \frac{2-3}{2}\right) = \left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ $\therefore \overline{MC} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{101}{4}} = \frac{\sqrt{101}}{2}$
B	<p>6.已知$\csc\theta > 0$且$\tan\theta < 0$，則θ為第幾象限角？ (A)一 (B)二 (C)三 (D)四</p> <p>【詳解】</p> $\csc\theta > 0 \quad \theta \in I. II$ $\tan\theta < 0 \Rightarrow \theta \in II. IV$ $\therefore \theta \in II$
C	<p>7.已知$A = \left(\frac{729}{1000}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{27}{343}\right)^{-\frac{1}{3}} + \left(5\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$，則A之值為何？ (A)$\frac{79}{100}$ (B)$\frac{80}{100}$ (C)$\frac{81}{100}$ (D)$\frac{82}{100}$</p> <p>【詳解】</p> $\text{原式} = \left[\left(\frac{9}{10}\right)^3\right]^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{3^3}{7^3}\right)^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{49}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{10}\right)^2 - \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} + \frac{7}{3} = \frac{81}{100} - \frac{7}{3} + \frac{7}{3} = \frac{81}{100}$
A	<p>8.已知$S_n = 1\frac{1}{1} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4} + \dots + \left(n + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$，則$S_{10}$之值為何？ (A)$56\frac{511}{512}$ (B)$56\frac{1023}{1024}$ (C)$57\frac{511}{512}$ (D)$57\frac{1023}{1024}$</p> <p>【詳解】</p> $\text{原式} = (1+2+3+\dots+10) + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^9}\right) = \frac{10 \times 11}{2} + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} = 55 + \frac{1023}{512}$

	$=56 + \frac{511}{512}$
C	<p>9. 已知 $f(x) = x^2 + ax + 1$，以 $2x + 3$ 除之所得餘式為 $\frac{1}{4}$，則 $f(x+1)$ 除以 $x-1$ 的餘式為何？ (A)7 (B)8 (C)9 (D)10</p> <p>【詳解】</p> $\begin{array}{r} 1 + a + 1 \\ - \frac{3}{2} + (-\frac{3}{2}a + \frac{9}{4}) \end{array} \Bigg -\frac{3}{2}$ $1 + (a - \frac{3}{2}) + (-\frac{3}{2}a + \frac{13}{4})$ $\therefore -\frac{3}{2}a + \frac{13}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = 2$ $\therefore f(x) = x^2 + 2x + 1$ $f(x+1) = (x+1)^2 + 2(x+1) + 1 = x^2 + 4x + 4$ <p>令 $x-1=0 \Rightarrow x=1$</p> <p>餘式 $= 1 + 4 + 4 = 9$</p>
D	<p>10. 已知 $\frac{x-1}{x+1} - \frac{6}{1-x} = \frac{12}{x^2-1}$，則 $\frac{x-1}{x+1}$ 之值為何？ (A) $-\frac{3}{2}$ (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{2}$</p> <p>【詳解】</p> $(x-1)^2 + 6(x+1) = 12$ $x^2 + 4x - 5 = 0$ $(x+5)(x-1) = 0$ <p>$x = -5, x = 1$ (不含)</p> $\therefore \frac{x-1}{x+1} = \frac{-5-1}{-5+1} = \frac{3}{2}$
B	<p>11. 已知一個長方形的長增加 3 公分，寬增加 4 公分之後，可得一個正方形，且正方形的面積為原長方形面積的兩倍，則原長方形的面積為多少平方公分？ (A)64 (B)72 (C)128 (D)144</p> <p>【詳解】</p> <p>設長 y (公分)、寬 x (公分)</p> <p>依題意：$\begin{cases} x+4 = y+3 \\ (x+4)(y+3) = 2xy \end{cases}$</p> $(y+3)^2 = 2(y-1)y$ $y^2 - 8y - 9 = 0$ $(y-9)(y+1) = 0$ <p>$y = 9, y = -1$ (不含) $\Rightarrow x = 8$</p>

∴長方形面積=9×8=72

A

12. 已知 $\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{4}{x} - \frac{9}{y} = -1 \end{cases}$ ，則下列何者正確？ (A) $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}}$ ， $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}$ (B) $x =$

$\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}$ ， $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}$ (C) $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}$ ， $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}}$ (D) $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}$ ， $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}$

【詳解】

令 $a = \frac{1}{x}$ ， $b = \frac{1}{y}$ ∴原式： $\begin{cases} 2a + 3b = 2 \\ 4a - 9b = -1 \end{cases}$

利用克拉瑪得 $a = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}$ ， $b = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}$

∴ $x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -9 \end{vmatrix}}$ ， $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}$

C

13. 已知 $ax^2 + 2x + c > 0$ 的解為 $-1 < x < 3$ ，則 $a + c$ 值為何？ (A) -4 (B) -2 (C) 2 (D) 4

【詳解】

由解得 $(x+1)(x-3) < 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$

∴ $-x^2 + 2x + 3 > 0$ $a = -1$ ， $c = 3$

$a + c = 2$

C

14. 已知 A (0, 1)、B (-3, 5)、C (a, b) 為平面上三點。若向量 \overrightarrow{AC} 的長度為 10，且與向量 \overrightarrow{AB} 反向，則 a, b 之值為何？ (A) a=9, b=0 (B) a=-3, b=5 (C) a=6, b=-7 (D) a=-6, b=9

【詳解】

$\overrightarrow{AB} = (-3, 4)$ $|\overrightarrow{AB}| = 5$

$\overrightarrow{AC} = (a, b-1)$ $|\overrightarrow{AC}| = 10$ ∴ $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow (a, b-1) = (6, -8)$ ∴ $a = 6$ ， $b = -7$

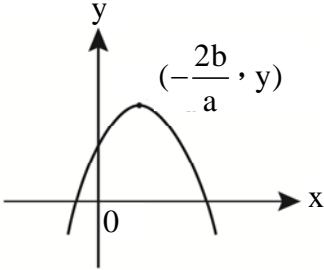
B

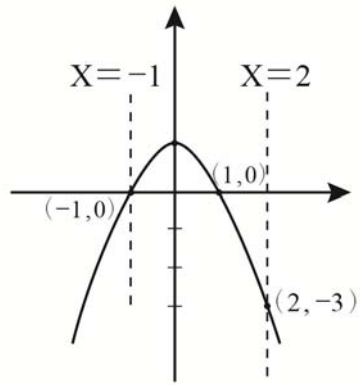
15. 已知 $|\overrightarrow{AB}| = 4$ 、 $|\overrightarrow{AC}| = 3$ ，又 \overrightarrow{AB} 與 \overrightarrow{AC} 的夾角為 $\frac{\pi}{3}$ ，則 $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}|$ 之值為何？

(A) $\sqrt{52}$ (B) $\sqrt{76}$ (C) $\sqrt{52 + 24\sqrt{3}}$ (D) 10

【詳解】

	$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 \times 3 \times \cos 60^\circ = 6$ $ \overline{AB} + 2\overline{AC} ^2 = \overline{AB} ^2 + 4\overline{AB} \cdot \overline{AC} + 4 \overline{AC} ^2 = 16 + 24 + 36 = 76$ $\therefore \overline{AB} + 2\overline{AC} = \sqrt{76}$
A	<p>16. 已知直線 L 過點 (1, 3)，且與 x 軸、y 軸在第二象限圍出一個等腰直角三角形，則下列何者為直線 L 的方程式？ (A) $x - y = -2$ (B) $x + y = -2$ (C) $2x - 2y = 1$ (D) $x + y = 2$</p> <p>【詳解】</p> <p>依題意可設 L: $x - y = a$ 過 (1, 3) $\Rightarrow 1 - 3 = a$</p> <p>\therefore L: $x - y = -2$</p>
A	<p>17. 若 $f(x) = (x^2 + 3x - 1)^2 (x^3 - 5x^2)$，則 $f'(1)$ 為何？ (A) -183 (B) -87 (C) -57 (D) -36</p> <p>【詳解】</p> $f'(1) = 2(x^2 + 3x - 1)(2x + 3)(x^3 - 5x^2) + (3x^2 - 10x)(x^2 + 3x - 1)^2 \Big _{x=1}$ $= 2 \times 3 \times 5 \times (-4) + (-7) \times 3^2$ $= -120 - 63 = -183$
D	<p>18. 試求三角函數 $\sin(-960^\circ)$ 之值 (A) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$</p> <p>【詳解】</p> $\sin(-960^\circ) = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
D	<p>19. 已知 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，$\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$，且 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$，$\cos \beta = \frac{12}{13}$，則 $\sin(\alpha + \beta)$ 之值為何？ (A) $-\frac{63}{65}$ (B) $-\frac{33}{65}$ (C) $\frac{33}{65}$ (D) $\frac{63}{65}$</p> <p>【詳解】</p> $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$ $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \left(\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{3}{5}\right) \left(\frac{-5}{13}\right) = \frac{63}{65}$
B	<p>20. $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 中選出三個相異數字以形成一個三位數，則所有可能形成的三位數的個數為何？ (A) 20 (B) 60 (C) 90 (D) 120</p> <p>【詳解】</p> $P_3^5 = \frac{5!}{2!} = 60$
B	<p>21. 箱子裡有 4 個相同之紅球及 6 個相同之白球。今連續抽出 3 個球 (抽出之球不放回箱子)，若每次抽球時箱子裏的球被抽中的機率均相等，則抽出之結果是只有一個紅球之</p>

	<p>機率為何？ (A)0.4 (B)0.5 (C)0.6 (D)0.7</p> <p>【詳解】</p> $P = \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{360}{720} = \frac{1}{2}$
A	<p>22. 已知一組數值資料 54, 56, 62, 63, 65 共五個，試問該組數值資料之母群體變異數為何？ (A)18 (B)36 (C)72 (D)90</p> <p>【詳解】</p> $\bar{x} = \frac{54 + 56 + 62 + 63 + 65}{5} = 60$ $\text{變異數} = \frac{(60-54)^2 + (60-56)^2 + (60-62)^2 + (60-63)^2 + (60-65)^2}{5} = 18$
A	<p>23. 已知拋物線 $y = ax^2 + 4bx + 4a$ 與 x 軸有兩相異交點，且頂點在第一象限，則下列敘述何者正確？ (A)$a < 0, a^2 < b^2$ (B)$a < 0, a^2 > b^2$ (C)$a > 0, a^2 < b^2$ (D)$a > 0, a^2 > b^2$</p> <p>【詳解】</p> $y = ax^2 + 4bx + 4a$ <p>頂點 $(-\frac{2b}{a}, y)$</p> <p>$\therefore a < 0$ (開口向下)</p> $\Delta = 16b^2 - 16a^2 > 0$ $b^2 > a^2$ 
D	<p>24. 試求曲線 $y = -x^2 + 1$ 在 $x = -1, x = 2$ 之間與 x 軸所圍成區域的面積。 (A)$\frac{4}{3}$ (B)$\frac{5}{3}$</p> <p>(C)$\frac{7}{3}$ (D)$\frac{8}{3}$</p> <p>【詳解】</p> $\int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left(-\frac{1}{3}x^3 + x\right) \Big _{-1}^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) \Big _1^2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$



- C 25. 若橢圓 $x^2 + 4y^2 - 4x - 16y + a = 0$ 不與 x 軸相交，且與 y 軸相切，則 a 之值為何？ (A)4
(B)8 (C)16 (D)24

【詳解】

$$x^2 + 4y^2 - 4x - 16y + a = 0$$

與 x 軸不相交

$$x^2 - 4x + a = 0$$

$$\Delta = 16 - 4a < 0$$

$$a > 4$$

與 y 軸相切

$$4y^2 - 16y + a = 0$$

$$\Delta = 256 - 16a = 0$$

$$a = 16$$