105 學年度技術校院四年制與專科學校二年制統一入學測驗
數學（C）試題

試題分析：

題目的數字設計較繁雜，而且出現一、兩題舊教材的題目，對於中上學生要得高分較不易，但試題分佈尚且中肯，對前三志願較有分辨作用。今年比去年（104 年）下降 8～12 分

《各章節配分情形》

	95 年	96 年	97 年	98 年	99 年	100 年	101 年	102 年	103 年	104 年	105 年
三角函數	2	3	4	3	4	3	4	3	2	4	4
多項式與函數	1	2	2	3	1	2	2	2		1	3
不等式	2	2	1			1	1		2	2	1
平面上直線	3	4	2	3	3	3	4	2	1	2	1
平面上的圓		1	1	1	2	1	2				1
極限	1				1			1		1	3
微積分	2	5	5	4	3	3	2	3	2	3	2
指數與對數	1	2	2	2	2	2	1	2	3	2	1
方程式論	2		1	1	1	1		2	2	1	1
圓錐曲線	1	2	2	1	1	2	3	2	2	1	1
向量	3	1	2	1	2	2	1	1	2	1	1
複數	2	2	2	2	1	1	1	1	2	1	1
數列級數				1	1	1	1	1	2	1	1
排列組合				1	1	2	2	1	2	2	2
機率				2	2	1	1	1	1	1	1
行列式								1	1	1	1
統計								2	1	1	

D

1.若直線 $3x-2y+6=0$ 的斜率為 a，y 截距為 b，x 截距為 c，且此直線與兩坐標軸所圍成 k 封閉區域面積為 d，求 $ab-cd$ 之值。 (A)$\frac{3}{2}$ (B)$\frac{9}{2}$ (C)$\frac{15}{2}$ (D)$\frac{21}{2}$

【詳解】

$a=\frac{3}{2}$ 又∵ $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & -2 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array}$

∴$b=3$，$c=-2$

又∵$d=\frac{1}{2}\times 3\times|-2|=3$

故 $ab-cd=\frac{3}{2}\times 3-(-2)\times 3=\frac{9+12}{2}=\frac{21}{2}$

B

2.若 $f(x)=\sec^2\frac{x}{2}+\csc^2\frac{x}{2}$ 的週期為 P，求 P 之值。 (A)$\frac{\pi}{2}$ (B)π (C)2π (D)π^2

【詳解】

$f(x)=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{4}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{4}{\sin^2 x}=4\csc^2 x$

故 $f(x)$ 的週期為π

B	3.設△ABC 三內角∠A、∠B、∠C 的對應邊分別為 a、b、c，且 $\sqrt{a^2-3bc}=b-c$，求∠A 之值。 (A)$\frac{\pi}{2}$ (B)$\frac{2\pi}{3}$ (C)$\frac{3\pi}{4}$ (D)$\frac{5\pi}{6}$ 【詳解】 $\because a^2-3bc=b^2-2bc+c^2$ $\therefore b^2+c^2-a^2=-bc$ 又$\because \cos A=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$ 又$\therefore 0°<\angle A<180°$ 故$\angle A=120°$
C	4.設 $\sec\theta+\csc\theta=1$，求 $\sec\theta\csc\theta$之值。 (A)$\sqrt{2}+1$ (B)$\sqrt{2}-1$ (C)$-\sqrt{2}-1$ (D)$-\sqrt{2}+1$ 【詳解】 $\because \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=1$ $(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\sin\theta\cos\theta)^2$ $1+2\sin\theta\cos\theta=(\sin\theta\cos\theta)^2$ 再令 $\sin\theta\cos\theta=A$ 則 $A^2-2A-1=0$ $\therefore A=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=1\pm\sqrt{2}$ 則 $\sin\theta\cos\theta=1-\sqrt{2}$ 故 $\sec\theta\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{1-2}=-1-\sqrt{2}$
B	5.設 $a=\cos40°\cos80°\cos160°$，$b=\sin10°\cos20°\cos40°$，則 $a+b$ 之值為何？ (A)$-\frac{1}{4}$ (B)0 (C)$\frac{1}{4}$ (D)$\frac{1}{2}$ 【詳解】 $a=-\frac{1}{2^3}=-\frac{1}{8}$ $b=\cos20°\cos40°\cos80°=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$ $a+b=0$
A	6.已知向量$\vec{a}=(-6,8)$且與$\vec{b}$之夾角為 60°，則向量$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影長為何？ (A)5 (B)7 (C)$5\sqrt{3}$ (D)10 【詳解】

$\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影＝（$|\vec{a}|\cos 60^\circ$）$\times \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

故 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影長＝$\left||\vec{a}|\cos 60^\circ\right| = 10\times\dfrac{1}{2}=5$

A

7.已知 a、b 為實數，若 f（x）＝x^3+ax^2+bx-6，g（x）＝x^2-7x+6，且 f（x）可被 g（x）整除，求 2a＋3b 之值。　(A)23　(B)36　(C)39　(D)45

【詳解】

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-1 \\
1-7+6 & 1+a+b-6 \\
 & 1-7+6 \\ \hline
 & (a+7)+(b-6)-6 \\
 & \quad -1\ +\ \ 7\quad -6 \\ \hline
 & \quad\ \ 0\ +\ \ 0\quad +0
\end{array}
$$

則 $\begin{cases} a+7+1=0 & \therefore a=-8 \\ b-6-7=0 & \therefore b=13 \end{cases}$

故 2a＋3b＝－16＋39＝23

D

8.已知 A、B、C 為常數，且對任意 x 均滿足 $\dfrac{3x^2+9x-3}{(x-1)(x+2)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}$，求 B 之值。　(A)－1　(B)0　(C)1　(D)2

【詳解】

$3x^2+9x-3=A(x+2)^2+B(x+2)(x-1)+C(x-1)$

$A=\dfrac{3+9-3}{(1+2)^2}=1$

$C=\dfrac{12-18-3}{-2-1}=3$

$\therefore B(x+2)(x-1)=3x^2+9x-3-x^2-4x-4-3x+3=2x^2+2x-4=2(x^2+x-2)$

故 B＝2

D

9.若三元一次聯立方程式 $\begin{cases} ax-ay=5 \\ ax-y+(1-a)z=3 \\ (1-a)y+(2a-3)z=1 \end{cases}$ 恰有一解，則 a 可能為下列何值？　(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

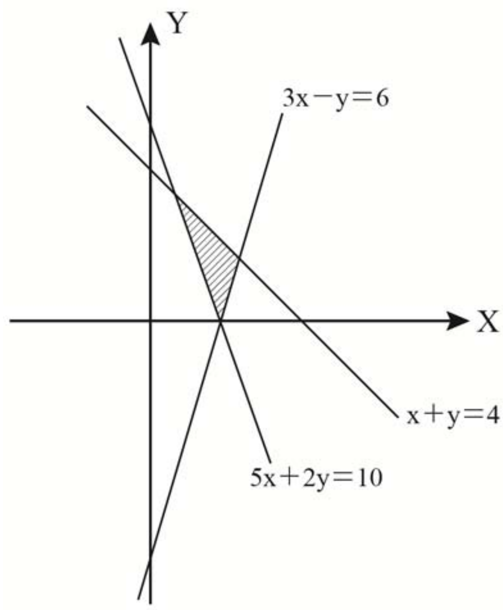
【詳解】

$\because$ 恰有一解　　$\therefore \triangle\neq 0$

$\triangle=\begin{vmatrix} a & -a & 0 \\ a & -1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 2a-3 \end{vmatrix}\neq 0$

展開得 $a(a-1)(a-2)\neq 0$　　$\therefore a\neq 0、1、2$

答案	題目
D	10.設 a、b、c 均為實數，若（a－b）（b－c）（c－a）＝－2，則 $\begin{vmatrix} 2a & b & b \\ 6c & 3c & 3b \\ 2c-2a & c-a & c-a \end{vmatrix}$ 之值為何？ (A)－12　(B)－6　(C)6　(D)12 【詳解】 $(c-a)\begin{vmatrix} 2a & b & b \\ 6c & 3c & 3b \\ 2c-2a & c-a & c-a \end{vmatrix} = (c-a)\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{提 }2\uparrow & \downarrow\times(-1) & \end{array} \\ \begin{vmatrix} 2a & b & b \\ 6c & 3c & 3b \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$ $=2(c-a)\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & & \text{提 }3(b-c)\uparrow \end{array} \\ \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 3c & 3c & 3(b-c) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = 6(c-a)(b-c)\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \downarrow\times(-1) & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 3c & 3c & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$ $=6(c-a)(b-c)\begin{vmatrix} a-b & b & 0 \\ 0 & 3c & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 6(c-a)(b-c)(a-b)\begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 3c & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $=-6(c-a)(b-c)(a-b)=(-6)(-2)=12$
A	11.已知 $z_1=\sqrt{3}+i$，$z_2=1+i$，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 $z_1^2z_2^4$ 可表示為下列哪一個？　(A)16（cos240°＋i sin240°）　(B)16（cos300°＋i sin300°）　(C)16（cos60°＋i sin60°）　(D)16（cos120°＋i sin120°） 【詳解】 $z_1^2\times z_2^4=[2(\cos30°+i\sin30°)]^2\times[\sqrt{2}(\cos45°+i\sin45°)]^4$ $=4(\cos60°+i\sin60°)\times4(\cos180°+i\sin180°)$ $=16(\cos240°+i\sin240°)$
B	12.滿足二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x+y\le4 \\ 3x-y\le6 \\ 5x+2y\ge10 \end{cases}$ 的整數解（x，y）共有幾個？　(A)3　(B)4　(C)5　(D)6 【詳解】 如圖，滿足不等式之整數解，有 4 個 （1，3），（2，0），（2，1），（2，2）



C 13.設 a、b、c、d、e、f 六數成等比數列，且已知 a＋c＋e＝168，b＋d＋f＝84，則 d 之值為何？ (A)6 (B)9 (C)16 (D)32

【詳解】

令 a、b、c、d、e、f＝a、ar、ar^2、ar^3、ar^4、ar^5

$$\begin{cases} a+b+c=a(1+r^2+r^4)=168\cdots① \\ b+d+f=ar(1+r^2+r^4)=84\cdots② \end{cases}$$

由 $\frac{①}{②}\Rightarrow\frac{1}{r}=2\Rightarrow r=\frac{1}{2}$（代①）$\Rightarrow a=128$

$\therefore d=ar^3=128\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=16$

A 14.已知 $\log_{10}2=p$，$\log_{10}3=q$，求 $\log_{\sqrt{6}}36-\log_{\frac{1}{6}}6+\log_6\sqrt{12}$ 之值。 (A)$5+\frac{2p+q}{2p+2q}$ (B)$3+\frac{2p+q}{2p+2q}$ (C)$3+\frac{2p+q}{2p-2q}$ (D)$5+\frac{2p+q}{2p-2q}$

【詳解】

$$原式=\log_{6^{\frac{1}{2}}}6^2-\log_{6^{-1}}6+\frac{\log_{10}12^{\frac{1}{2}}}{\log_{10}6}=\frac{2}{\frac{1}{2}}-\frac{1}{-1}+\frac{\frac{1}{2}(\log_{10}4+\log_{10}3)}{\log_{10}2+\log_{10}3}$$

$$=4+1+\frac{\frac{1}{2}(2p+q)}{p+q}=5+\frac{2p+q}{2p+2q}$$

A 15.設 $a=(0.1)^{\frac{1}{4}}$，$b=(0.2)^{\frac{1}{4}}$，$c=(0.2)^{\frac{1}{5}}$，則下列何者正確？ (A)a＜b＜c (B)c＜a＜b (C)b＜a＜c (D)b＜c＜a

【詳解】

$\because\frac{1}{5}<\frac{1}{4}\Rightarrow(0.2)^{\frac{1}{5}}>(0.2)^{\frac{1}{4}}\Rightarrow c>b$

	又 $(0.1)^{\frac{1}{4}}<(0.2)^{\frac{1}{4}}\Rightarrow a<b$ $\therefore c>b>a$
C	16.試求 139^6 除以 4 的餘數為何？ (A)3 (B)2 (C)1 (D)0 【詳解】 139÷4 之餘 3 ∴餘⇒3^6 除以 4 之餘，故餘 1
C	17.若同時擲兩粒公正的骰子，則下列何者正確？ (A)點數和等於 5 的機率大於點數和等於 8 的機率 (B)點數和等於 6 的機率大於點數和等於 7 的機率 (C)點數和等於 7 的機率大於點數和等於 9 的機率 (D)點數和等於 9 的機率大於點數和等於 8 的機率 【詳解】 P（點數和＝5）＝$\frac{4}{36}$、P（點數和＝6）＝$\frac{5}{36}$ P（點數和＝7）＝$\frac{6}{36}$、P（點數和＝8）＝$\frac{5}{36}$ P（點數和＝9）＝$\frac{4}{36}$，故選(C)
D	18.連續投擲一公正硬幣四次，觀察其出現正反面的情形。已知 E 為第二次投擲出現正面的事件，F 為第三次投擲出現正面的事件，G 為第四次投擲中至少出現兩次正面的事件。若 p（A）表示事件 A 發生的機率，則下列敘述何者正確？ (A)p（E）＝$\frac{1}{8}$ (B)p（E∩G'）＝$\frac{1}{8}$ (C)p（F｜E）＝$\frac{1}{4}$ (D)p（G）＝$\frac{11}{16}$ 【詳解】 P（至少二正）＝全－P（無正）－P（恰一正）＝$1-\frac{1}{16}-\frac{4}{16}=1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$
C	19.下列各選項的抽樣資料中，何者的樣本標準最小？ (A)7.5、11.5、19.5、23.5、25.5 (B)6、10、18、22、24 (C)3.5、4.5、6.5、7.5、8 (D)3、5、9、11、12 【詳解】 選項 C 的數值差距最小，故標準差最小
C	20.已知圓的方程式為 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$；直線方程式為 $x+y-1=0$，若圓和直線的交點分別為 A 與 B，圓心為 O，則下列何者正確？ (A) $\overline{AB}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (B)圓心 O 到直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的距離為 $\frac{1}{2}$ (C)圓心 O 與 A、B 形成的三角形△ABO 面積為 $\frac{1}{2}$ (D)交點 A、B 的座標分別為（－1，0），（0，1） 【詳解】 圓心（1，1），$r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+(-2)^2-4}=1$

$d=\dfrac{|1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\overline{AB}=2\sqrt{r^2-d^2}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

△ABO 之面積$=\dfrac{\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\dfrac{1}{2}$

A

21.已知一橢圓之焦點分別為（3，3）及（－1，3），且過點（3，6），則下列何者為橢圓上的點？　(A)（－1，0）　(B)（1，2）　(C)（2，3）　(D)（4，5）

【詳解】

F_1（3，3），F_2（－1，3），P（3，6）

$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=3+\sqrt{(-1-3)^2+(3-6)^2}=8=2a$，$a=4$

中心（1，3），$c=2$，$a^2=b^2+c^2$，$16=b^2+4$，$b^2=12$，$\Rightarrow\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{12}=1$

A（－1，0）$\Rightarrow\dfrac{4}{16}+\dfrac{9}{12}=1$

A

22.已知 $f(x)=\dfrac{x(2x-1)(13x+2)^4}{\sqrt{27x+9}}$，求 f（x）在 x＝0 的導數 f'（0）之值。　(A)$-\dfrac{16}{3}$　(B)$-\dfrac{8}{3}$　(C)$-\dfrac{4}{3}$　(D)$-\dfrac{1}{3}$

【詳解】

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x(2x-1)(13x+2)^4}{\sqrt{27x+9}}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(2x-1)(13x+2)^4}{\sqrt{27x+9}}=\frac{(-1)(2)^4}{3}$$

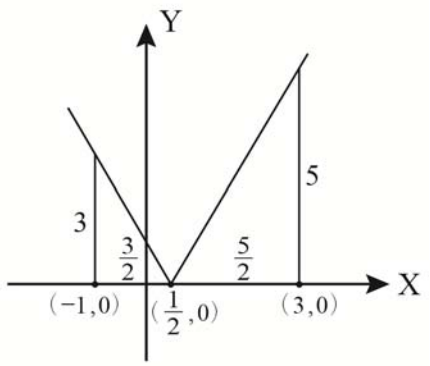
$$=\frac{-16}{3}$$

B

23.試求定積分 $\int_{-1}^{3}|2x-1|dx$ 之值＝？　(A)$\dfrac{15}{2}$　(B)$\dfrac{17}{2}$　(C)$\dfrac{19}{2}$　(D)$\dfrac{21}{2}$

【詳解】

$$A=\frac{3\times\dfrac{3}{2}}{2}+\frac{5\times\dfrac{5}{2}}{2}=\frac{34}{4}=\frac{17}{2}$$



D

24.試求 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{n}-\dfrac{2n^2+n+2}{n+2}\right)$ 之值＝？　(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

	【詳解】 原式$=\lim\limits_{n\to x}\frac{2n^3+4n^2+n+2-2n^3-n^2-2n}{n^2+2n}=\lim\limits_{n\to x}\frac{3n^2-n+2}{n^2+2n}=3$
B	25.設 $f(x)=x^3+3x^2$、$g(x)=4$，則兩函數 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 之圖形所圍成的封閉區域面積為何？ (A)$\frac{11}{4}$ (B)$\frac{27}{4}$ (C)$\frac{91}{4}$ (D)$\frac{221}{4}$ 【詳解】 $\begin{cases}y=x^3+3x^2\\y=4\end{cases}\Rightarrow x^3+3x^2=4$，$(x-1)(x^2+4x+4)=0$　$x=1$，-2 $\int_{-2}^{1}[4-(x^3+3x^2)]dx=(4x-\frac{1}{4}x^4-x^3)\Big\vert_{-2}^{1}=(4-\frac{1}{4}-1)-(-8-4+8)=\frac{27}{4}$